

Obsah plochy mezi kružnicí a parabolou

Určete obsah plochy mezi kružnicí

$$x^2 + y^2 = 2$$

a parabolou

$$y = x^2,$$

pomocí dvojnásobného integrálu v pravouhlých souřadnicích.

1. Průsečíky křivek

Dosadíme rovnici paraboly do rovnice kružnice:

$$x^2 + (x^2)^2 = 2 \Rightarrow x^2 + x^4 = 2 \Rightarrow x^4 + x^2 - 2 = 0.$$

Substitucí $u = x^2$ dostáváme:

$$u^2 + u - 2 = 0 \Rightarrow (u - 1)(u + 2) = 0 \Rightarrow u = 1.$$

Tedy:

$$x = \pm 1, \quad y = x^2 = 1.$$

Průsečíky: $(-1, 1)$ a $(1, 1)$.

2. Vyjádření horní a dolní funkce

Z rovnice kružnice:

$$x^2 + y^2 = 2 \Rightarrow y = \sqrt{2 - x^2}.$$

Oblast ohraničují křivky:

$$\text{dole: } y = x^2, \quad \text{nahore: } y = \sqrt{2 - x^2},$$

pro $x \in [-1, 1]$. Využijeme symetrii a počítáme pouze pro $x \in [0, 1]$, výsledek pak zdvojnásobíme.

3. Dvojný integrál

$$S = 2 \int_0^1 \int_{x^2}^{\sqrt{2-x^2}} dy \, dx = 2 \int_0^1 \left(\sqrt{2-x^2} - x^2 \right) dx.$$

Rozdělíme integrál:

$$S = 2 \left(\int_0^1 \sqrt{2-x^2} \, dx - \int_0^1 x^2 \, dx \right).$$

Výpočet prvního integrálu:

$$\int_0^1 \sqrt{2-x^2} dx.$$

Použijeme substituci:

$$x = \sqrt{2} \sin \theta, \quad dx = \sqrt{2} \cos \theta d\theta,$$

pro $x = 0$ je $\theta = 0$, pro $x = 1$ je $\theta = \arcsin\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{\pi}{4}$. Dále:

$$\sqrt{2-x^2} = \sqrt{2-2\sin^2 \theta} = \sqrt{2\cos^2 \theta} = \sqrt{2} \cos \theta,$$

tedy:

$$\int_0^1 \sqrt{2-x^2} dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sqrt{2} \cos \theta \cdot \sqrt{2} \cos \theta d\theta = 2 \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos^2 \theta d\theta.$$

Použijeme vzorec:

$$\cos^2 \theta = \frac{1 + \cos 2\theta}{2},$$

tedy:

$$2 \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos^2 \theta d\theta = 2 \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1 + \cos 2\theta}{2} d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{4}} (1 + \cos 2\theta) d\theta = \left[\theta + \frac{1}{2} \sin 2\theta \right]_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}.$$

Výpočet druhého integrálu:

$$\int_0^1 x^2 dx = \left[\frac{x^3}{3} \right]_0^1 = \frac{1}{3}.$$

4. Výsledek

$$S = 2 \left(\frac{\pi}{4} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} \right) = 2 \left(\frac{\pi}{4} + \frac{1}{6} \right) = \frac{\pi}{2} + \frac{1}{3}.$$

$$S = \frac{\pi}{2} + \frac{1}{3}$$