

Hyperbolická rotace

Geometrický výklad Lorentzovy transformace

Autor: Dušan Polanský za pomoci AI

1. Běžná rotace v euklidovské rovině

V klasické euklidovské geometrii má bod souřadnice (x, y) a délku vektoru

$$r^2 = x^2 + y^2.$$

Pokud tento vektor otočíme o úhel θ , získáme nový vektor (x', y') , který splňuje

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

Tento vztah zachovává délku $r^2 = x'^2 + y'^2$ a nazýváme jej *rotací*. Křivka, na níž se bod pohybuje při rotaci, je kružnice:

$$x^2 + y^2 = r^2 = \text{konst.}$$

2. Analogická situace v prostoročase

V prostoročase je analogem délky tzv. *Minkowského interval*

$$s^2 = c^2 t^2 - x^2.$$

Chceme-li najít transformaci, která tento interval zachovává, hledáme lineární zobrazení

$$\begin{pmatrix} ct' \\ x' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k & l \\ m & n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ct \\ x \end{pmatrix},$$

takové, že

$$c^2 t'^2 - x'^2 = c^2 t^2 - x^2.$$

Nejprve rozepíšeme transformační rovnice

$$\begin{aligned} ct' &= k ct + l x, \\ x' &= m ct + n x. \end{aligned}$$

Nyní dosadíme do invariantu

$$(ct')^2 - (x')^2.$$

Dostaneme

$$(ct')^2 = (kct + lx)^2 = k^2 c^2 t^2 + 2kl c t x + l^2 x^2,$$

a obdobně

$$(x')^2 = (mct + nx)^2 = m^2 c^2 t^2 + 2mn \, ctx + n^2 x^2.$$

Po odečtení obou výrazů vyjde

$$\begin{aligned} (ct')^2 - (x')^2 &= (k^2 c^2 t^2 + 2kl \, ctx + l^2 x^2) \\ &\quad - (m^2 c^2 t^2 + 2mn \, ctx + n^2 x^2) \\ &= (k^2 - m^2) c^2 t^2 + 2(kl - mn) ctx + (l^2 - n^2) x^2. \end{aligned}$$

Požadujeme, aby tato rovnice byla totožná s původním intervalem

$$c^2 t^2 - x^2.$$

Proto musí být stejné koeficienty u jednotlivých mocnin.

Porovnáme nejprve členy s $c^2 t^2$:

$$k^2 - m^2 = 1.$$

Dále porovnáme smíšené členy ctx :

$$2(kl - mn) = 0,$$

odkud dostáváme

$$kl = mn.$$

Nakonec porovnáme členy s x^2 :

$$l^2 - n^2 = -1,$$

což lze přepsat do estetičtějšího tvaru

$$n^2 - l^2 = 1.$$

Dostáváme tedy trojici podmínek

$$\boxed{k^2 - m^2 = 1, \quad n^2 - l^2 = 1, \quad kl = mn.}$$

Teprve nyní je zřejmé, proč se přirozeně nabízí parametrizace pomocí hyperbolických funkcí

$$k = n = \cosh \varphi, \quad l = m = \sinh \varphi,$$

nebo (v závislosti na zvolené orientaci souřadných os)

$$l = m = -\sinh \varphi.$$

V obou případech jsou uvedené tři podmínky automaticky splněny díky identitě

$$\cosh^2 \varphi - \sinh^2 \varphi = 1.$$

3. Parametrizace pomocí hyperbolických funkcí

Tyto vztahy lze jednoduše splnit, zavedeme-li parametr φ (tzv. *rapiditu*) tak, že

$$k = n = \cosh \varphi, \quad l = m = \sinh \varphi.$$

Dostáváme tedy transformaci

$$\begin{pmatrix} ct' \\ x' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cosh \varphi & -\sinh \varphi \\ -\sinh \varphi & \cosh \varphi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ct \\ x \end{pmatrix}.$$

Vidíme, že místo funkcí $\cos$ a $\sin$ zde vystupují funkce $\cosh$ a $\sinh$. Ty jsou definovány jako

$$\cosh \varphi = \frac{e^\varphi + e^{-\varphi}}{2}, \quad \sinh \varphi = \frac{e^\varphi - e^{-\varphi}}{2}.$$

A platí pro ně analogická, ale „obrácená“ identita:

$$\cosh^2 \varphi - \sinh^2 \varphi = 1.$$

Z tohoto důvodu se mluví o *hyperbolické rotaci* — zachovává totiž hyperbolu

$$c^2 t^2 - x^2 = \text{konst.}$$

stejně, jako běžná rotace zachovává kružnici.

4. Geometrický význam

Představme si v rovině (x, ct) hyperbolu

$$(ct)^2 - x^2 = 1.$$

Každý bod na této hyperbole odpovídá určité rychlosti, protože platí

$$\tanh \varphi = \frac{v}{c}.$$

Lorentzova transformace s rapiditou φ odpovídá „otočení soustavy souřadnic“ kolem počátku, ale místo kružnice se jedná o hyperbolu. Tedy:

- klasická rotace $\Rightarrow$ zachovává vzdálenosti na kružnici,
- hyperbolická rotace $\Rightarrow$ zachovává invariantní interval v prostoročase.

5. Srovnání obou typů rotací

Vlastnost	Klasická rotace	Hyperbolická rotace (Lorentz)
Zachovávaná veličina	$x^2 + y^2$	$c^2 t^2 - x^2$
Matice transformace	$\begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} \cosh \varphi & -\sinh \varphi \\ -\sinh \varphi & \cosh \varphi \end{pmatrix}$
Křivka invariantu	kružnice	hyperbola
Parametr	úhel θ	rapidita φ
Skládání transformací	$\theta_{1+2} = \theta_1 + \theta_2$	$\varphi_{1+2} = \varphi_1 + \varphi_2$